Criteris de correcció globals

- Heu de corregir quatre qüestions en total d'entre les vuit proposades. Si l'alumne presenta més de quatre qüestions, corregiu-ne les quatre primeres.
- Cada problema té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions màximes que apareixen a cada apartat (si no està indicat, tots els apartats d'una mateixa pregunta tenen la mateixa valoració). Les puntuacions dels apartats són independents: si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades equivocades), donau-li la puntuació adient.
- Es valorarà conjuntament el resultat, la justificació (ja sigui simbòlica o escrita), la claredat i ús del llenguatge matemàtic i no matemàtic, i l'estructura de la resposta. Orientativament, penalitzau:
  - Els errors de càlcul amb un 25%; els errors greus i/o que portin a resultats incoherents o absurds, amb un 50%.
  - En preguntes de justificar, si la justificació és només "intuïtiva" (p. ex. una observació que no respon exhaustivament a allò que s'ha demanat), amb el 30%-50%; en preguntes de justificar, una resposta sense cap justificació s'ha de penalitzar amb el 100%.
  - En qualsevol pregunta, si apareixen raonaments (que no són clars/evidents) sense justificar, amb el 20%-30%.
  - La imprecisió en l'ús del llenguatge matemàtic (p. ex. variables sense introduir/que canvien de significat), o la falta de claredat per absència de llenguatge matemàtic, amb un 20%-30%.
  - L'estructura s'ha de penalitzar en funció de la dificultat per entendre la resposta.
- Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris generals o específics. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Criteris de correcció específics

Només es detallen els apartats en què hi ha diverses preguntes o que es poden desglossar. En apartats on s'omet el criteri de correcció específic, aquest serà simplement "Càlcul i/o justificació correcta".

P1. — Considera la matriu M i el vector $\mathbf{b}$,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivament.

(a) **[3 punts]** Indica per a quins valors de a la matriu M és invertible.

Criteris: -1 punt per error de càlcul. -1.5 punt si es malinterpreta la igualtat (i.e. que és invertible si $\det = 0$).

(b) **[3 punts]** Calcula, per a tots els valors de a que sigui possible, la inversa de M.

Criteris: -1 punt per error de càlcul. -1 punt si s'olvida una passa concreta. Només 1 punt si es calcula per a un cas concret.

(c) **[4 punts]** Calcula, per al cas $a = 0$, el vector $\mathbf{x}$ tal que $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Criteris: -1 punt per error de càlcul. No penalitzar si es reutilitza el càlcul incorrecte de l'apartat anterior.

P2. — Considera les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

i sigui O la matriu nul·la d'ordre 2×2.

(a) [**4 punts**] Calcula totes les matrius X tals que $AX - X = B$.

Criteris: 2 punts si s'aïlla bé el sistema, 1 punt si es calcula bé la inversa, i 1 punt si es proporciona la solució final correcta. En cas de resoldre'l amb X com a matriu de 4 variables, -1 punt per error de càlcul.

(b) [**3 punts**] Troba una matriu Y diferent de O tal que $(A - B)Y = O$.

Criteris: -1 punt per error de càlcul (màxim 2 errors). Si es deixa el cas general està bé. Si es troba un únic cas particular, independentment del mètode, és vàlid.

(c) [**3 punts**] Indica totes les matrius Z que compleixen la igualtat $AZ = O$.

Criteris: -1 punt per error de càlcul.

P3. — Considera el pla $\pi : 2x + 3y + z - 6 = 0$.

(a) [**3 punts**] Determina els vèrtexs del triangle que ve determinat per la intersecció del pla amb els eixos de coordenades.

Criteris: 1 punt per cada vèrtex correctament calculat.

(b) [**3 punts**] Calcula l'àrea del triangle anterior.

Criteris: 1 punt pel càlcul dels vectors, 2 punts pel càlcul de l'àrea. -1 punt per error de càlcul. No penalitzar si s'ometen unitats o no es simplifica el resultat.

(c) [**4 punts**] Sigui A el vèrtex del triangle sobre l'eix d'abscisses (eix OX). Calcula la recta perpendicular al pla que passa per A.

Criteris: 2 punts per calcular bé el vector director de la recta, 2 punts per escriure una equació vàlida. -1 punt per error de càlcul.

P4. — Siguin a i b dues constants reals no nul·les.
Considerem el pla $\pi : x + ay - 2z = 3$ i la recta

$$r : \begin{cases} x + bz = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

(a) **[4 punts]** Per a quins valors de a i b la recta r és perpendicular al pla π? Per a aquests casos concrets, calcula el punt de tall entre r i π, i calcula o justifica quina és la distància de la recta al pla.

Criteris: Si es determina que la única solució, $a = 0$, no està considerada per l'enunciat, 4 pt. Alternativament, 1 punt pel vector director de r, 1 punt pel punt d'intersecció de la recta amb el pla, 1 punt per una expressió de la recta, 1 punt per justificació de la distància igual a zero. Penalitzar -1 punt per error de càlcul.

(b) **[3 punts]** Per a quins valors de a i b la recta r és paral·lela al pla π?

Criteris: 1.5 punts per plantejar ($\vec{d_r} \cdot \vec{n} = 0$ i no existeix punt en comú). 1.5 punts per càlcul correcte (0.75 punts cada variable). -1 punt per error de càlcul.

(c) **[3 punts]** Existeixen alguns valors de a i b per als quals la recta r està continguda en el pla π?

Criteris: 1.5 punts per plantejar ($\vec{d_r} \cdot \vec{n} = 0$ i existeix algun punt en comú). 1.5 punt per càlcul correcte. -1 punt per error de càlcul que no s'hagn penalitzat a l'apartat anterior.

P5. — La quantitat de tones d'aigua infectada per un bacteri s'espera que segueixi la funció $f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1$ sent $x \geq 0$ els dies d'infecció i $f(x)$ les tones d'aigua infectada.

(a) **[4 punts]** Quantes tones d'aigua hi havia inicialment infectades pel bacteri? Cap a quin valor tendeix la quantitat d'aigua infectada? Interpreta els resultats.

Criteris: 1 punt pel càlcul de $f(0)$, 2 punts pel càlcul del límit i 1 punt per la interpretació.

(b) **[4 punts]** En quin moment hi ha menys quantitat d'aigua infectada? Quantes tones hi ha en aquell moment?

Criteris: 2 punts per cada pregunta (a: 1 punt plantejament, 1 punt resolució; b: 1 punt resolució, 1 punt justificació). -1 punt per càlculs mal fets.

(c) **[2 punts]** Hi ha algun moment en què l'aigua no estigui infectada? Justifica la resposta.

Criteris: -2 punts si no està justificat.

P6. — **[10 punts]** Representa la regió compresa entre la corba $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, l'eix d'abscisses (eix OX) i les rectes $x = 0$ i $x = 7$. Calcula'n l'àrea.
Criteris: 5 punts per la representació, dividits en: 1 pt domini, 1 pt asímptotes, 2 pt monotonia, 1 pt gràfic i eixos. 5 punts pel càlcul de l'àrea.

P7. — Un espai mostral conté dos successos A i B. Sabent que $P(A \cap B) = 0.3$, $P(A/B) = P(B/A)$ i $P(A^c) = 0.4$ (sent A^c el succés complementari), calcula:

(a) [**2 punts**] $P(B/A)$.

(b) [**3 punts**] $P(B)$.

(c) [**3 punts**] $P(A^c \cap B^c)$.

(d) [**2 punts**] Són A i B successos independents?

Criteris: en cada apartat, -1 punt si l'error és de càlcul. Si el resultat no té sentit, s'elimina tota la puntuació. Es permet qualsevol resolució sempre que estigui justificada.

P8. — El pes dels nadons segueix una distribució normal de mitjana $\mu = 3.1$ kg i desviació típica σ desconeguda. Se sap que només el 30.5% dels nadons pesa més de 3.8 kg. Calcula, arrodonint els resultats a 4 decimals,

(a) [**4 punts**] Quina és la desviació típica?

Criteris: 1 punt plantejar bé el problema, 1 punt tipificar correctament, 2 punts solució correcta.

(b) [**3 punts**] Suposant que $\sigma = 1.3725$, quina és la probabilitat que un nadó pesi menys de 2.7 kg?

Criteris: 1 punt plantejar bé el problema, 1 punt tipificar correctament, 1 punt resultat correcte.

(c) [**3 punts**] Suposant que $\sigma = 1.3725$, quina és la probabilitat que un nadó pesi entre 2.7 i 3.5 kg?

Criteris: 1 punt plantejar bé el problema, 1 punt tipificar correctament, 1 punt resultat correcte.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic, o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Considera la matriu M i el vector $\mathbf{b}$,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivament.

(a) **[3 punts]** Indica per a quins valors de a la matriu M és invertible.

Solució.

$$\det(M) = a(a+1) + 1 - 2 - (a+1) = a^2 - 2 = 0 \iff a = \pm\sqrt{2}.$$

Aleshores, la matriu és invertible per a $a \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, +\sqrt{2}\}$.

(b) **[3 punts]** Calcula, per a tots els valors de a que sigui possible, la inversa de M.

Solució.

$$M^{-1} = \frac{1}{a^2-2}\begin{pmatrix} -1 & -1+a & 1 \\ -a & 2-a & -2+a^2+a \\ a+1 & -1 & -a-1 \end{pmatrix}.$$

(c) **[4 punts]** Calcula, per al cas $a = 0$, el vector $\mathbf{x}$ tal que $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Solució. $M\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{b}$. Per $a = 0$ tenim que

$$M^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notem que també es pot veure directament substituint $a = 0$ a M, ja que la darrera columna de M és el vector que es demana.

P2. — Considera les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

i sigui O la matriu nul·la d'ordre 2×2.

(a) **[4 punts]** Calcula totes les matrius X tals que $AX - X = B$.

Solució. $AX - X = (A - I)X = B$. Per tant,

$$X = (A-I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(b) **[3 punts]** Troba una matriu Y diferent de O tal que $(A - B)Y = O$.

Solució. Sigui

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

tenim que Y ha de complir que

$$\begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ -a+2c & -b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $a = 2c$ i $b = 2d$. Llavors qualsevol matriu de la forma

$$\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

és vàlida sempre que c i d no s'anul.lin a la vegada.

(c) **[3 punts]** Indica totes les matrius Z que compleixen la igualtat $AZ = O$.

Solució. A és una matriu invertible, ja que $\det(A) = 9 \neq 0$. Aleshores, $AZ = O \iff A^{-1}AZ = A^{-1}O \iff Z = A^{-1}O = O$. L'única matriu és $Z = O$.

P3. — Considera el pla $\pi : 2x + 3y + z - 6 = 0$.

(a) **[3 punts]** Determina els vèrtexs del triangle que ve determinat per la intersecció del pla amb els eixos de coordenades.

Solució. Sigui A el tall amb l'eix OX, llavors $A = (a, 0, 0)$.
Sigui B el tall amb l'eix OY, llavors $B = (0, b, 0)$.
Sigui C el tall amb l'eix OZ, llavors $C = (0, 0, c)$.
Imposem que aquests punts pertanyen al pla π:

A compleix $2a + 0 + 0 - 6 = 0 \rightarrow a = 3 \rightarrow A = (3, 0, 0)$.
B compleix $0 + 3b + 0 - 6 = 0 \rightarrow b = 2 \rightarrow B = (0, 2, 0)$.
C compleix $0 + 0 + c - 6 = 0 \rightarrow c = 6 \rightarrow C = (0, 0, 6)$.

(b) **[3 punts]** Calcula l'àrea del triangle anterior.

Solució. Tenim que $\vec{AB} = (-3, 2, 0)$ i $\vec{AC} = (-3, 0, 6)$.
Aleshores, l'àrea del triangle ve donada per

$$A_{triangle} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} \right\|}{2} = \frac{\sqrt{12^2 + 18^2 + 6^2}}{2} = \frac{\sqrt{504}}{2} = \frac{6\sqrt{14}}{2} = 3\sqrt{14}u^2.$$

(c) **[4 punts]** Sigui A el vèrtex del triangle sobre l'eix d'abscisses (eix OX). Calcula la recta perpendicular al pla que passa per A.

Solució. El vector director de la recta és $d_r = (2, 3, 1)$ i ha de passar pel punt $A = (3, 0, 0)$. Aleshores, la recta és

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda, \\ y = 3\lambda, \\ z = \lambda. \end{cases}$$

P4. — Siguin a i b dues constants reals no nul·les.
Considerem el pla $\pi : x + ay - 2z = 3$ i la recta

$$r : \begin{cases} x + bz = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

(a) **[4 punts]** Per a quins valors de a i b la recta r és perpendicular al pla π? Per a aquests casos concrets, calcula el punt de tall entre r i π, i calcula o justifica quina és la distància de la recta al pla.

Solució. Punts de r: $A = (0, 0, 1/b)$ i $B = (1, 0, 0)$, $\vec{d_r} = \vec{AB} = (1, 0, -1/b)$.
Vector normal al pla: $\vec{n} = (1, a, -2)$. La recta és perpendicular al pla si $\vec{d_r} = \lambda(1, a, -2)$. I.e $(1, 0, -1/b) = \lambda(1, a, -2)$. Aleshores, s'ha de complir que

$$\begin{aligned} &\lambda = 1, \\ &a\lambda = 0 \to a = 0, \\ &-1/b = -2\lambda \to b = 1/2. \end{aligned}$$

Ara bé, com que a és no nul, no es dóna aquest cas. L'exercici ja estaria acabat. Si algú el calcula hauria de ser P és tal que satisfà el sistema. La distància és 0 ja que són secants.

$$\begin{aligned} &x - 2z = 3 \to x = 2z + 3, \\ &x + \frac{1}{2}z = 1 \to 2z + 3 + \tfrac{1}{2}z = 1 \to \tfrac{5}{2}z = -2 \to z = \frac{-4}{5}, \\ &y = 0. \end{aligned}$$

Per tant, $P = (7/5, 0, -4/5)$.

(b) **[3 punts]** Per a quins valors de a i b la recta r és paral·lela al pla π?

Solució. Volem que $\vec{d_r} \cdot \vec{n} = 0$. Per tant,

$$\vec{d_r} \cdot \vec{n} = 1 + 0 + \frac{2}{b} = 0 \leftrightarrow b = -2.$$

Per tant, a pot ser qualsevol valor real, però $b = -2$.

(c) **[3 punts]** Existeixen alguns valors de a i b per als quals la recta r està continguda en el pla π?

Solució. La recta estarà continguda en el pla si $\vec{d_r} \cdot \vec{n} = 0$ i, a més, un punt qualsevol de r pertany a π. Ara bé, $B \notin \pi$, ja que $1 \neq 3$. Aleshores, NO existeixen valors de a i b perquè la recta estigui continguda en π.

P5. — La quantitat de tones d'aigua infectada per un bacteri s'espera que segueixi la funció $f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1$ sent $x \geq 0$ els dies d'infecció i $f(x)$ les tones d'aigua infectada.

(a) **[4 punts]** Quantes tones d'aigua hi havia inicialment infectades pel bacteri? Cap a quin valor tendeix la quantitat d'aigua infectada? Interpreta els resultats.

Solució.

- Inicialment hi ha $f(0) = 2$ tones d'aigua.
- Tenim que $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} + 0.15x + 1 = +\infty$. Llavors tendeix que tota l'aigua estigui infectada.

(b) **[4 punts]** En quin moment hi ha menys quantitat d'aigua infectada? Quantes tones hi ha en aquell moment?

Solució.

- Cercam el mínim de la funció: $f'(x) = -e^{-x}+0.15 = 0$. És a dir, a $x = -\ln(0.15) \approx 1.897119984885881$ dies.
- En aquest moment hi ha un total de $f(-\ln(0.15)) = e^{\ln(0.15)} - 0.15\ln(0.15) + 1 \approx 1.434567997732882$ tones.

(c) **[2 punts]** Hi ha algun moment en què l'aigua no estigui infectada? Justifica la resposta.

Solució. No perquè el mínim s'assoleix quan hi ha 1.434567997732882 tones. També es pot fer calculant x perquè $f(x) = 0$ i veure que no té solució.

P6. — [10 punts] Representa la regió compresa entre la corba $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, l'eix d'abscisses (eix OX) i les rectes $x = 0$ i $x = 7$. Calcula'n l'àrea.

Solució. La funció $f(x) = 0$ només a $x = 0$. A més, és una funció positiva per a $x \in (0, +\infty]$. La seva representació es troba a la figura 1.

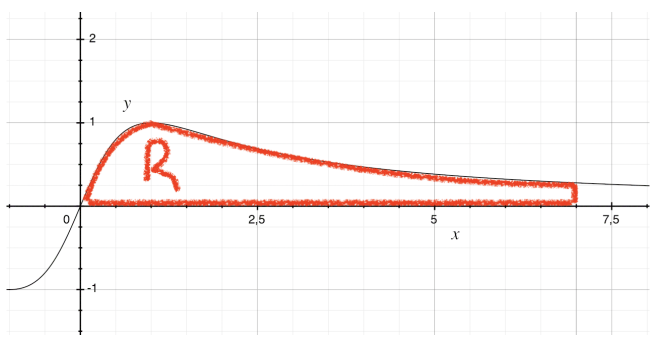

Figura 1: Regió compresa entre la corba $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = 7$

Aleshores, l'àrea que volem calular és

$$A = \int_0^7 \frac{2x}{x^2+1} = \left[\ln|x^2+1|\right]_0^7 = \ln(50) - \ln(1) = \ln(50) \approx 3.912023005428146u^2$$

P7. — Un espai mostral conté dos successos A i B. Sabent que $P(A\cap B) = 0.3$, $P(A/B) = P(B/A)$ i $P(A^c) = 0.4$ (sent A^c el succés complementari), calcula:

(a) **[2 punts]** $P(B/A)$.

(b) **[3 punts]** $P(B)$.

(c) **[3 punts]** $P(A^c \cap B^c)$.

(d) **[2 punts]** Són A i B successos independents?

Solució.

(a) $P(B/A) = 0.5$,

(b) $P(B) = 0.6$,

(c) $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (0.6 + 0.6 - 0.3) = 0.1$,

(d) No són independents, perquè $P(B/A) \neq P(B)$.

P8. — El pes dels nadons segueix una distribució normal de mitjana $\mu = 3.1$ kg i desviació típica σ desconeguda. Se sap que només el 30.5% dels nadons pesa més de 3.8 kg. Calcula, arrodonint els resultats a 4 decimals,

(a) **[4 punts]** Quina és la desviació típica?

Solució. $p(x > 3.8) = p\left(z > \frac{3.8-3.1}{\sigma}\right) = 1 - p\left(z \leq \frac{3.8-3.1}{\sigma}\right) = 0.305$. Per tant, tenim que $p\left(z \leq \frac{3.8-3.1}{\sigma}\right) = 1 - 0.305 = 0.695$. D'on

$$\frac{3.8-3.1}{\sigma} = 0.51 \ \rightarrow \ \sigma = 1.3725.$$

(b) **[3 punts]** Suposant que $\sigma = 1.3725$, quina és la probabilitat que un nadó pesi menys de 2.7 kg?

Solució. $p(x < 2.7) = p\left(z < \frac{2.7-3.1}{1.3725}\right) = p\,(z < -0.2914) = 1 - p\,(z < 0.2914) = 1 - 0.6141 = 0.3859.$

(c) **[3 punts]** Suposant que $\sigma = 1.3725$, quina és la probabilitat que un nadó pesi entre 2.7 i 3.5 kg?

Solució. $p(2.7 < x < 3.5) = p\left(\frac{2.7-3.1}{1.3725} < z < \frac{3.5-3.1}{1.3725}\right) = p\,(-0.2914 < z < 0.2914) = p\,(z < 0.2914) - p\,(z < -0.2914) = 2p\,(z < 0.2914) - 1 = 0.2282.$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.