



Criteris de correcció globals

- Heu de corregir quatre qüestions en total d'entre les vuit proposades. Si l'alumne presenta més de quatre qüestions, corregiu-ne les quatre primeres.
- Cada problema té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions màximes que apareixen a cada apartat (si no està indicat, tots els apartats d'una mateixa pregunta tenen la mateixa valoració). Les puntuacions dels apartats són independents: si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades equivocades), donau-li la puntuació adient.
- Es valorarà conjuntament el resultat, la justificació (ja sigui simbòlica o escrita), la claredat i ús del llenguatge matemàtic i no matemàtic, i l'estructura de la resposta. Orientativament, penalitzau:
 - Els errors de càlcul amb un 25%; els errors greus i/o que portin a resultats incoherents o absurds, amb un 50%.
 - En preguntes de justificar, si la justificació és només "intuïtiva" (p. ex. una observació que no respon exhaustivament a allò que s'ha demanat), amb el 30%-50%; en preguntes de justificar, una resposta sense cap justificació s'ha de penalitzar amb el 100%.
 - En qualsevol pregunta, si apareixen raonaments (que no són clars/evidents) sense justificar, amb el 20%-30%.
 - La imprecisió en l'ús del llenguatge matemàtic (p. ex. variables sense introduir/que canvien de significat), o la falta de claredat per absència de llenguatge matemàtic, amb un 20%-30%.
 - L'estructura s'ha de penalitzar en funció de la dificultat per entendre la resposta.
- Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris generals o específics. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Criteris de correcció específics

Només es detallen els apartats en què hi ha diverses preguntes o que es poden desglossar. En apartats on s'omet el criteri de correcció específic, aquest serà simplement "Càlcul i/o justificació correcta".



P1. — Volem contractar una empresa de gestió d'entre les següents:

- L'empresa *A* ens cobra 150 € de cost base, i adicionalment 5 € per cada client i 3 € per cada factura que emet.
- L'empresa *B* ens cobra 300 € de cost base, 10 € per cada client, i no cobra per emetre factures.
- L'empresa *C* ens cobra 100 € de cost base, no cobra en funció del nombre de clients, però cobra 5 € per cada factura que emet.

a) Si l'any passat vàrem tenir 50 clients *i*, en total, vàrem emetre 180 factures, quina empresa ens hauria costat menys contractar?

Criteris: Calcular correctament tres dades (3 pt), només dues (2 pt), només una o cap (0 pt).
(Total 3 pt)

De cara a l'any vinent, tenim una previsió de *x* clients i *y* factures. Amb aquesta previsió, l'empresa *A* ens costaria 1050 € i l'empresa *B* ens costaria 900 €.

b) Calcula el nombre de clients *x* i el nombre de factures *y* prevists.

Criteris: Plantejament (2 pt), solució (1.5 pt/variable, total 3pt). **(Total 5 pt)**

c) Amb *x* clients i *y* factures, quant ens costaria l'empresa *C*?

Criteris: No es penalitza si es deixa en funció d'*x* i *y*. **(Total 2 pt)**

P2. — Un camió transporta una càrrega d'exactament 12 metres cúbics de volum *i*, com a màxim, un pes de 18 tones. Pot transportar:

- Sorra, que pesa 1.6 tones per metre cúbic, i que es factura a 80 € per metre cúbic.
- Grava, que pesa 1.8 tones per metre cúbic, i que es factura a 100 € per metre cúbic.
- Cendra, que pesa 0.5 tones per metre cúbic, i que es factura a 25 € per metre cúbic.

Ens interessa calcular el preu més alt que podrà facturar en un viatge. Per fer-ho, es demana:

a) Planteja la maximització d'aquest preu com un problema de programació lineal amb dues variables.

Criteris: No penalitzar si es planteja amb tres variables. Penalitzar -1 pt si es planteja amb dues variables i la tercera no està incorporada (p.ex. s'ignora una de les variables). Penalitzar -1 pt si la funció a maximitzar no apareix en tota la pregunta. **(Total 4 pt)**

b) Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten.

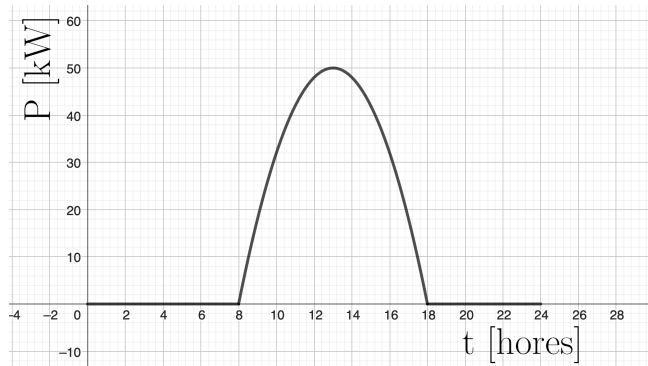
Criteris: 1 pt/recta (total 2 pt) i 1 pt/vèrtex (total 2 pt). **(Total 4 pt)**

c) Calcula el nombre de tones de cada material que s'han de transportar per tal d'assolir el preu màxim, i determina també aquest preu màxim.

Criteris: 1 pt pel càlcul i 1 pt per interpretar. No penalitzar si la solució s'expressa correctament en m^3 . **(Total 2 pt)**

P3. — La potència generada per una placa solar, P (mesurada en kW), depèn del temps transcorregut, t (mesurat en hores), segons l'expressió següent:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{per a } 0 \leq t < 8, \\ -2t^2 + 52t + c & \text{per a } 8 \leq t < 18, \\ 0 & \text{per a } 18 \leq t \leq 24, \end{cases}$$



on c és un paràmetre real.

- a) Tenint en compte que la funció és contínua, quin és el valor del paràmetre c ?

Criteris: 2 pt per trobar almenys una igualtat, 1 pt pel càlcul correcte de c . No penalitzar si no es justifica igualtat entre límits per la dreta i l'esquerra. No penalitzar si c s'obté del valor màxim igual a 50 deduït de la gràfica (però penalitzar al següent apartat). **(Total 3 pt)**

- b) Tenint en compte que el valor màxim s'assoleix a les 13 hores, calcula amb l'expressió donada quina és la potència en aquest moment.

Criteris: 0 pt si es justifica partint de la gràfica. Penalitzar -0.5 pt si no s'utilitzen unitats correctament. **(Total 3 pt)**

- c) En quins intervals la funció és creixent? En quins intervals és decreixent?

Criteris: 2pt/interval, total 4 pt. Pot ser argumentat en base a la gràfica, en base a la derivada o en base a que el màxim es troba en $t = 13$. No penalitzar si s'inclouen o no els intervals on la funció és constant (no s'especifica si el creixement és necessàriament estricte). Penalitzar -0.5 pt per cada interval tancat. **(Total 4 pt)**

P4. — Considerem el pes d'un adult, p (en kg), i el seu metabolisme basal, m (en watts). Un investigador ens proporciona el model següent:

$$p(m) = 0.1 \cdot m^{1.5}, \quad m \in (0, +\infty).$$

- a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $p(m)$, indicant el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals.

Criteris: Indicar el domini (1 pt). Indicar els valors en els extrems del domini (1 pt/extrem, total 2pt). Indicar el creixement/decreixement (1 pt). Indicar els màxims/mínims locals (1 pt). Claredat/correcció de la gràfica i els eixos (2 pt). **(Total 7 pt)**

- b) Troba la funció que dona el metabolisme basal en funció del pes, $m(p)$ (és a dir, aïlla la variable m).

Criteris: 1 pt si es passa 0.1 dividint, i 2 pt si es dona el resultat correcte. **(Total 3 pt)**

P5. — Considera les funcions:

$$f(x) = (x + 2)^3, \quad g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x.$$

- a) Justifica, calculant, que $f'(x) = g'(x)$.

Criteris: 2 pt/derivada, total 4 pt. Penalitzar -1 pt si no es justifica que són dues expressions iguals.
(Total 4 pt)

- b) És cert que $f(x) = g(x)$?

Criteris: Penalitzar -1 pt per error de càlcul lleu. Penalitzar tota la puntuació per error de càlcul greu (p. ex. $(x + 2)^3 = x^3 + 2^3$).
(Total 3 pt)

- c) Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Criteris: Penalitzar -1 pt per no argumentar com es resol el límit. Penalitzar tota la puntuació si es dedueix incorrectament que $\frac{\infty}{\infty} = 1$.
(Total 3 pt)

P6. — En Manel escull a l'atzar dues xifres entre 0 i 9, que podrien estar repetides.

- a) Quina és la probabilitat que ambdues xifres siguin múltiple de tres?

Criteris: En tot el problema, no penalitzar si es consideren 3 o 4 múltiples de tres. Penalitzar -1 pt si no es justifica.
(Total 3 pt)

- b) El producte de les dues xifres és múltiple de tres si almenys una de les xifres és múltiple de tres. Quina és la probabilitat que el producte de les dues xifres sigui múltiple de tres?

Criteris: Penalitzar -2 pt si no es justifica.
(Total 4 pt)

Ara, en Pep et dona el seu número de telèfon, que conté nou xifres també entre 0 i 9, possiblement repetides, i que suposarem que són xifres escollides a l'atzar.

- c) Quina és la probabilitat que el producte de les nou xifres sigui múltiple de tres?

Criteris: Penalitzar -1 pt si no es justifica.
(Total 3 pt)

P7. — D'un total de $n = 80$ alumnes, el 80% d'alumnes han aprovat un examen de matemàtiques, i el 75% han aprovat un examen de física. A més, dels que han suspès l'examen de matemàtiques, només un 50% ha aprovat el de física.

- a) Dels que han suspès l'examen de física, quants han aprovat el de matemàtiques?

Criteris: Penalitzar -0.5 pt si es deixa en termes de fracció decimal o percentatge.
(Total 4 pt)

- b) Quants alumnes han aprovat algun dels dos exàmens?

Criteris: Penalitzar -0.5 pt si es deixa en termes de fracció decimal o percentatge.
(Total 3 pt)

- c) Aprovar l'examen de física i aprovar l'examen de matemàtiques són esdeveniments independents?

Criteris: 1 pt per resposta correcta i 2 pt per justificar.
(Total 3 pt)



P8. — Per estudiar la vida de les tortugues marines, hem recopilat l'edat que varen assolir alguns exemplars que varen morir per causes naturals, i hem obtingut (en anys):

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	\bar{x}
55	62	69	70	72	77	94	103	75.25

Suposant que aquestes dades segueixen una distribució normal, i que la seva desviació típica poblacional és de $\sigma = 20$ anys,

- a) Calcula l'interval de confiança per a la mitjana poblacional amb el 90% de confiança.

Criteris: Càlcul de $z_{\alpha/2}$ 1 pt, càlcul de $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 1 pt, càlcul dels extrems de l'interval 2 pt. Penalitzar -1 pt si s'utilitza 1.645 sense justificar que és $z_{\alpha/2}$. **(Total 4 pt)**

Suposem ara, a més, que la mitjana poblacional és de $\mu = 75.25$.

- b) Quina és la probabilitat que una tortuga marina superi els 80 anys de vida?

Criteris: Penalitzar -1 pt si la distribució no és correcta. Penalitzar -1.5 pt si la probabilitat es deriva de la mostra amb la llei de Laplace. **(Total 3 pt)**

- c) Quina és la probabilitat que una tortuga marina superi els 80 anys de vida, però no els 100 anys de vida?

Criteris: Penalitzar -1 pt si la distribució no és correcta. Penalitzar -1.5 pt si la probabilitat es deriva de la mostra amb la llei de Laplace. **(Total 3 pt)**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0, 1)$.



Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic, o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Volem contractar una empresa de gestió d'entre les següents:

- L'empresa *A* ens cobra 150 € de cost base, i addicionalment 5 € per cada client i 3 € per cada factura que emet.
- L'empresa *B* ens cobra 300 € de cost base, 10 € per cada client, i no cobra per emetre factures.
- L'empresa *C* ens cobra 100 € de cost base, no cobra en funció del nombre de clients, però cobra 5 € per cada factura que emet.

- a) Si l'any passat vàrem tenir 50 clients i, en total, vàrem emetre 180 factures, quina empresa ens hauria costat menys contractar? **(3 pt)**

Solució. Podem emprar matrius per a calcular-ho:

$$\begin{pmatrix} 150 & 5 & 3 \\ 300 & 10 & 0 \\ 100 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 50 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 940 \\ 800 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

És a dir, ens hauria costat 940 € l'empresa *A*, 800 € l'empresa *B*, i 1000 € l'empresa *C*.

De cara a l'any vinent, tenim una previsió de x clients i y factures. Amb aquesta previsió, l'empresa *A* ens costaria 1050 € i l'empresa *B* ens costaria 900 €.

- b) Calcula el nombre de clients x i el nombre de factures y prevists. **(5 pt)**

Solució. Sigui K el cost de l'empresa *C*. Aleshores,

$$\begin{pmatrix} 150 & 5 & 3 \\ 300 & 10 & 0 \\ 100 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1050 \\ 900 \\ K \end{pmatrix},$$

que és equivalent a

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1050 - 150 \\ 900 - 300 \\ K - 100 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1050 - 150 \\ 900 - 300 \end{pmatrix}$$

Resolent el sistema, $x = 60$ i $y = 200$.

- c) Amb x clients i y factures, quant ens costaria l'empresa *C*? **(2 pt)**

Solució. Seguint la solució de l'apartat anterior,

$$100 + 0x + 5y = K \implies K = 5 \cdot 200 + 100 = 1100.$$

És a dir, l'empresa *C* ens costaria 1100 €.

P2. — Un camió transporta una càrrega d'exactament 12 metres cúbics de volum i, com a màxim, un pes de 18 tones. Pot transportar:

- Sorra, que pesa 1.6 tones per metre cúbic, i que es factura a 80 € per metre cúbic.
- Grava, que pesa 1.8 tones per metre cúbic, i que es factura a 100 € per metre cúbic.
- Cendra, que pesa 0.5 tones per metre cúbic, i que es factura a 25 € per metre cúbic.

Ens interessa calcular el preu més alt que podrà facturar en un viatge. Per fer-ho, es demana:

- a) Planteja la maximització d'aquest preu com un problema de programació lineal amb dues variables. (4 pt)

Solució. Ho podem resoldre com un problema de programació lineal en dues dimensions. En particular, siguin x els metres cúbics de sorra, y els metres cúbics de grava, i $12 - x - y$ els metres cúbics de cendra. Aleshores, les restriccions són:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 12 - x - y \geq 0 \\ 1.6x + 1.8y + 0.5(12 - x - y) \leq 18 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 12 \\ 1.1x + 1.3y \leq 12 \end{array} \right\}$$

Per una altra part, la funció que volem maximitzar és:

$$f(x, y) = 80x + 100y + 25 \cdot (12 - x - y) = 55x + 75y + 300.$$

- b) Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. (4 pt)

Solució. La regió factible ve donada només per les tres primeres condicions (si se satisfan les dues primeres i la quarta, aleshores sempre se satisfà la tercera), d'on obtenim els vèrtexs de la regió com a:

$$(x_1, y_1) = (0, 0), \quad (x_2, y_2) = (10.91, 0), \quad (x_3, y_3) = (0, 9.23).$$

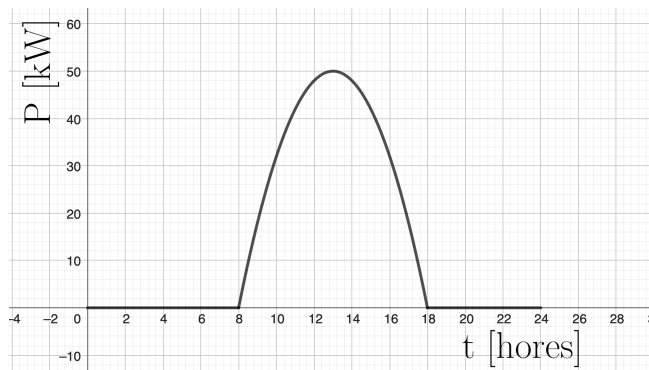
- c) Calcula el nombre de tones de cada material que s'han de transportar per tal d'assolir el preu màxim, i determina també aquest preu màxim. (2 pt)

Solució. La funció que volem maximitzar és $f(x, y) = 55x + 75y + 300$, que té un valor màxim a $f(0, 9.23) = 992.31$.

És a dir, el preu màxim és de 992.31 €. A més, aquest s'assoleix amb $x = 0$ metres cúbics de sorra, $y = 9.23$ metres cúbics de grava, i $(12 - x - y) = 2.77$ metres cúbics de cendra, que equivalen a 16.62 tones de grava i 1.38 tones de cendra.

P3. — La potència generada per una placa solar, P (mesurada en kW), depèn del temps transcorregut, t (mesurat en hores), segons l'expressió següent:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{per a } 0 \leq t < 8, \\ -2t^2 + 52t + c & \text{per a } 8 \leq t < 18, \\ 0 & \text{per a } 18 \leq t \leq 24, \end{cases}$$



on c és un paràmetre real.

- a) Tenint en compte que la funció és contínua, quin és el valor del paràmetre c ? (3 pt)

Solució. Coneixent els punts per on passa la funció quadràtica,

$$\begin{cases} -2 \cdot 8^2 + 52 \cdot 8 + c = 0, \\ -2 \cdot 18^2 + 52 \cdot 18 + c = 0. \end{cases}$$

Resolent qualsevol d'aquestes dues equacions obtenim que $c = -288$.

- b) Tenint en compte que el valor màxim s'assoleix a les 13 hores, calcula amb l'expressió donada quina és la potència en aquest moment. (3 pt)

Solució. Ens demanen el valor $P(13)$, que és:

$$P(t) = -2t^2 + 52t + c \implies P(13) = -2 \cdot 13^2 + 52 \cdot 13 - 288 \implies P(13) = 50 \text{ kW}.$$

- c) En quins intervals la funció és creixent? En quins intervals és decreixent? (4 pt)

Solució. Segons la gràfica, és creixent abans del màxim $t = 13$, i és decreixent després.

Els intervals en què la funció és constant ($t \in [0, 8]$ i $t \in [18, 24]$) són tècnicament creixents (i també decreixents), però no estrictament creixents (ni estrictament decreixents).

P4. — Considerem el pes d'un adult, p (en kg), i el seu metabolisme basal, m (en watts). Un investigador ens proporciona el model següent:

$$p(m) = 0.1 \cdot m^{1.5}, \quad m \in (0, +\infty).$$

- a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $p(m)$, indicant el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals. (7 pt)

Solució. El domini és $m \in (0, \infty)$.

En els extrems,

$$\lim_{m \rightarrow 0^+} p(m) = p(0) = 0.1 \cdot 0^{1.5} = 0, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} p(m) = p(0) = 0.1 \cdot \infty^{1.5} = +\infty.$$

La funció és clarament creixent, ja que la seva derivada és sempre positiva i, per no ser $m = 0$ del domini, no té ni mínims ni màxims.

- b) Troba la funció que dona el metabolisme basal en funció del pes, $m(p)$ (és a dir, aïlla la variable m). (3 pt)

Solució. Únicament hem d'invertir la funció:

$$p = 0.1 \cdot m^{1.5} \implies m^{1.5} = \frac{p}{0.1} \implies m = \left(\frac{p}{0.1}\right)^{1/0.667} \implies m = 4.64 \cdot p^{0.667}.$$

És a dir, la funció demanada és $m(p) = 4.64 \cdot p^{0.667}$.

P5. — Considera les funcions:

$$f(x) = (x + 2)^3, \quad g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x.$$

a) Justifica, calculant, que $f'(x) = g'(x)$. **(4 pt)**

Solució. Calculem la derivada de la primera funció:

$$f'(x) = ((x + 2)^3)' = 3 \cdot (x + 2)^2 = 3 \cdot (x^2 + 4x + 4) = 3x^2 + 12x + 12.$$

Per al segon terme:

$$g'(x) = (x^3 + 6x^2 + 12x)' = 3x^2 + 2 \cdot 6x + 12 = 3x^2 + 12x + 12,$$

d'on observam que els dos termes són iguals.

b) És cert que $f(x) = g(x)$? **(3 pt)**

Solució. No, ja que $f(0) = 2^3 = 8$, però $g(0) = 0$.

c) Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. **(3 pt)**

Solució. Podem veure que els dos polinomis són de grau 3, i que els dos tenen el coeficient 1 al terme de grau 3, així que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot x^3 + \dots}{1 \cdot x^3 + \dots} = 1.$$

Alternativament, atès que $f(x)$ i $g(x)$ són dues primitives de la funció $3x^2 + 12x + 12$, podem calcular explícitament $f(x)$ com a:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + C}{x^3 + 6x^2 + 12x} = 1,$$

on C és una constant real desconeguda.

Alternativament, també es pot aplicar la regla de De L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ si existeix,}$$

i, en aquest cas, el límit del quocient entre les derivades sí que existeix:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1 \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

P6. — En Manel escull a l'atzar dues xifres entre 0 i 9, que podrien estar repetides.

a) Quina és la probabilitat que ambdues xifres siguin múltiple de tres? **(3 pt)**

Solució. Cada una de les dues xifres té una probabilitat de $4/10$ de ser un múltiple de tres per la llei de Laplace.

Sigui A l'esdeveniment "la primera xifra és múltiple de tres", i B l'esdeveniment "la segona xifra és múltiple de tres". Atès que l'elecció d'ambdues xifres és independent, la probabilitat demanada és de

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \left(\frac{4}{10}\right) \cdot \left(\frac{4}{10}\right) = \frac{16}{100}.$$

- b) El producte de les dues xifres és múltiple de tres si almenys una de les xifres és múltiple de tres. Quina és la probabilitat que el producte de les dues xifres sigui múltiple de tres? **(4 pt)**

Solució. Observem que el producte de les dues xifres serà múltiple de tres si alguna d'elles ho és. Amb els mateixos esdeveniments que la pregunta anterior,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \left(\frac{4}{10}\right) + \left(\frac{4}{10}\right) - \left(\frac{16}{100}\right) = \frac{64}{100}.$$

Ara, en Pep et dona el seu número de telèfon, que conté nou xifres també entre 0 i 9, possiblement repetides, i que suposarem que són xifres escollides a l'atzar.

- c) Quina és la probabilitat que el producte de les nou xifres sigui múltiple de tres? **(3 pt)**

Solució. Considerem els esdeveniments A_i : la xifra i -èsima és múltiple de tres. Observem que el producte dels nombres serà múltiple de tres, si i només si almenys un dels nombres ho és. Per tant, la probabilitat demanada és:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_9).$$

És més fàcil calcular la probabilitat que NO sigui múltiple de tres:

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_9^c) = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \dots P(A_9^c) = \left(\frac{6}{10}\right)^9 \implies P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_9) = 1 - \left(\frac{6}{10}\right)^9 = 0.990$$

P7. — D'un total de $n = 80$ alumnes, el 80% d'alumnes han aprovat un examen de matemàtiques, i el 75% han aprovat un examen de física. A més, dels que han suspès l'examen de matemàtiques, només un 50% ha aprovat el de física.

- a) Dels que han suspès l'examen de física, quants han aprovat el de matemàtiques? **(4 pt)**

Solució. Escollint un alumne a l'atzar, definim els esdeveniments M : "ha aprovat l'examen de matemàtiques"; i F : "ha aprovat l'examen de física". Aleshores,

$$P(M) = 0.80, \quad P(F) = 0.75, \quad P(F|M^c) = 0.50.$$

Per tant,

$$P(F|M^c) = 0.50 \implies P(F^c|M^c) = 0.50 \implies P(M^c|F^c) = \frac{P(M^c)}{P(F^c)} \cdot P(F^c|M^c) = 0.4 \implies P(M|F^c) = 0.6.$$

És a dir, un 60% dels alumnes que han suspès l'examen de física, han aprovat el de matemàtiques.

En quantitat total d'alumnes, el 25% de 80 alumnes, és a dir 20 alumnes, han suspès l'examen de física. Per tant, el 60% d'aquests 20 alumnes, és a dir 12 alumnes, han suspès l'examen de física i han aprovat el de matemàtiques.

- b) Quants alumnes han aprovat algun dels dos exàmens? **(3 pt)**

Solució. Pel teorema de les probabilitats totals,

$$P(F) = P(F|M)P(M) + P(F|M^c)P(M^c) \implies P(F|M) = 0.8125.$$

Per tant, podem calcular la probabilitat de la intersecció i, per tant, de la unió:

$$\begin{aligned} P(F|M) &= \frac{P(F \cap M)}{P(M)} \implies P(F \cap M) = P(F|M)P(M) = 0.65 \\ \implies P(F \cup M) &= P(F) + P(M) - P(F \cap M) = 0.90. \end{aligned}$$

És a dir, el 90% de 80 alumnes, 72 alumnes han aprovat algun dels dos exàmens.

- c) Aprovar l'examen de física i aprovar l'examen de matemàtiques són esdeveniments independents?

(3 pt)

Solució. No, ja que $P(F \cap M) = 0.65$, però $P(F) \cdot P(M) = 0.60$.

P8. — Per estudiar la vida de les tortugues marines, hem recopilat l'edat que varen assolir alguns exemplars que varen morir per causes naturals, i hem obtingut (en anys):

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	\bar{x}
55	62	69	70	72	77	94	103	75.25

Suposant que aquestes dades segueixen una distribució normal, i que la seva desviació típica poblacional és de $\sigma = 20$ anys,

- a) Calcula l'interval de confiança per a la mitjana poblacional amb el 90% de confiança.

(4 pt)

Solució. Per a un nivell de confiança del 90%, el nivell de significació és $\alpha = 0.10$, i l'interval demanat el podem calcular com a:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(75.25 - 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{8}}, 75.25 + 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{8}} \right) = (63.62, 86.88).$$

Suposem ara, a més, que la mitjana poblacional és de $\mu = 75.25$.

- b) Quina és la probabilitat que una tortuga marina superi els 80 anys de vida?

(3 pt)

Solució. Si $X \sim \mathcal{N}(75.25, 20)$, aleshores la variable aleatòria $Z = \frac{X-75.25}{20}$ segueix una distribució $\mathcal{N}(0, 1)$. Per tant,

$$P(X \geq 80) = P\left(\frac{X - 75.25}{20} \geq \frac{80 - 75.25}{20}\right) = P(Z \geq 0.2375) = 1 - P(Z \leq 0.2375) = 1 - 0.5948 = 0.4052.$$

És a dir, la probabilitat demanada és de 0.4052 o del 40.52%.

- c) Quina és la probabilitat que una tortuga marina superi els 80 anys de vida, però no els 100 anys de vida?

(3 pt)

Solució. D'acord, amb la notació de l'apartat anterior, calculem primer $P(X \leq 80)$ i $P(X \leq 100)$:

$$P(X \leq 80) = 1 - P(X \geq 80) = 0.5948,$$

i també

$$P(X \leq 100) = P\left(\frac{X - 75.25}{20} \leq \frac{100 - 75.25}{20}\right) = P(Z \leq 1.2375) = 0.8925.$$

Per tant, la probabilitat demanada és:

$$P(80 \leq X \leq 100) = P(X \leq 100) - P(X \leq 80) = 0.2977.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0, 1)$.