



Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic, o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Volem contractar una empresa de gestió d'entre les següents:

- L'empresa *A* ens cobra 150 € de cost base, i addicionalment 5 € per cada client i 3 € per cada factura que emet.
- L'empresa *B* ens cobra 300 € de cost base, 10 € per cada client, i no cobra per emetre factures.
- L'empresa *C* ens cobra 100 € de cost base, no cobra en funció del nombre de clients, però cobra 5 € per cada factura que emet.

a) Si l'any passat vàrem tenir 50 clients *i*, en total, vàrem emetre 180 factures, quina empresa ens hauria costat menys contractar? **(3 pt)**

De cara a l'any vinent, tenim una previsió de x clients i y factures. Amb aquesta previsió, l'empresa *A* ens costaria 1050 € i l'empresa *B* ens costaria 900 €.

b) Calcula el nombre de clients x i el nombre de factures y prevists. **(5 pt)**

c) Amb x clients i y factures, quant ens costaria l'empresa *C*? **(2 pt)**

P2. — Un camió transporta una càrrega d'exactament 12 metres cúbics de volum i , com a màxim, un pes de 18 tones. Pot transportar:

- Sorra, que pesa 1.6 tones per metre cúbic, i que es factura a 80 € per metre cúbic.
- Grava, que pesa 1.8 tones per metre cúbic, i que es factura a 100 € per metre cúbic.
- Cendra, que pesa 0.5 tones per metre cúbic, i que es factura a 25 € per metre cúbic.

Ens interessa calcular el preu més alt que podrà facturar en un viatge. Per fer-ho, es demana:

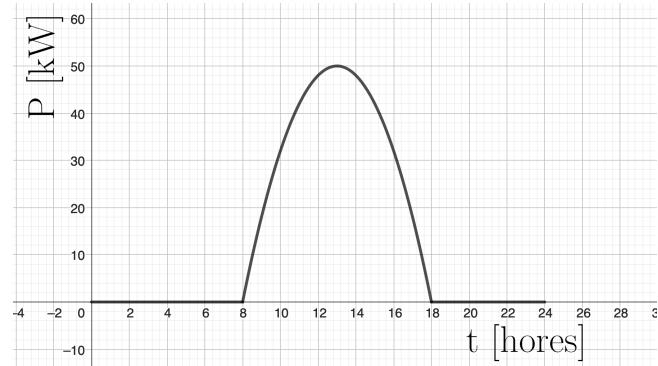
a) Planteja la maximització d'aquest preu com un problema de programació lineal amb dues variables. **(4 pt)**

b) Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. **(4 pt)**

c) Calcula el nombre de tones de cada material que s'han de transportar per tal d'assolir el preu màxim, i determina també aquest preu màxim. **(2 pt)**

P3. — La potència generada per una placa solar, P (mesurada en kW), depèn del temps transcorregut, t (mesurat en hores), segons l'expressió següent:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{per a } 0 \leq t < 8, \\ -2t^2 + 52t + c & \text{per a } 8 \leq t < 18, \\ 0 & \text{per a } 18 \leq t \leq 24, \end{cases}$$



on c és un paràmetre real.

- Tenint en compte que la funció és contínua, quin és el valor del paràmetre c ? **(3 pt)**
- Tenint en compte que el valor màxim s'assoleix a les 13 hores, calcula amb l'expressió donada quina és la potència en aquest moment. **(3 pt)**
- En quins intervals la funció és creixent? En quins intervals és decreixent? **(4 pt)**

P4. — Considerem el pes d'un adult, p (en kg), i el seu metabolisme basal, m (en watts). Un investigador ens proporciona el model següent:

$$p(m) = 0.1 \cdot m^{1.5}, \quad m \in (0, +\infty).$$

- Fes una gràfica esquemàtica de la funció $p(m)$, indicant el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals. **(7 pt)**
- Troba la funció que dona el metabolisme basal en funció del pes, $m(p)$ (és a dir, aïlla la variable m). **(3 pt)**

P5. — Considera les funcions:

$$f(x) = (x + 2)^3, \quad g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x.$$

- Justifica, calculant, que $f'(x) = g'(x)$. **(4 pt)**
- És cert que $f(x) = g(x)$? **(3 pt)**
- Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. **(3 pt)**



P6. — En Manel escull a l'atzar dues xifres entre 0 i 9, que podrien estar repetides.

- a) Quina és la probabilitat que ambdues xifres siguin múltiple de tres? **(3 pt)**
- b) El producte de les dues xifres és múltiple de tres si almenys una de les xifres és múltiple de tres. Quina és la probabilitat que el producte de les dues xifres sigui múltiple de tres? **(4 pt)**

Ara, en Pep et dona el seu número de telèfon, que conté nou xifres també entre 0 i 9, possiblement repetides, i que suposarem que són xifres escollides a l'atzar.

- c) Quina és la probabilitat que el producte de les nou xifres sigui múltiple de tres? **(3 pt)**

P7. — D'un total de $n = 80$ alumnes, el 80% d'alumnes han aprovat un examen de matemàtiques, i el 75% han aprovat un examen de física. A més, dels que han suspès l'examen de matemàtiques, només un 50% ha aprovat el de física.

- a) Dels que han suspès l'examen de física, quants han aprovat el de matemàtiques? **(4 pt)**
- b) Quants alumnes han aprovat algun dels dos exàmens? **(3 pt)**
- c) Aprovar l'examen de física i aprovar l'examen de matemàtiques són esdeveniments independents? **(3 pt)**

P8. — Per estudiar la vida de les tortugues marines, hem recopilat l'edat que varen assolir alguns exemplars que varen morir per causes naturals, i hem obtingut (en anys):

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	\bar{x}
55	62	69	70	72	77	94	103	75.25

Suposant que aquestes dades segueixen una distribució normal, i que la seva desviació típica poblacional és de $\sigma = 20$ anys,

- a) Calcula l'interval de confiança per a la mitjana poblacional amb el 90% de confiança. **(4 pt)**

Suposem ara, a més, que la mitjana poblacional és de $\mu = 75.25$.

- b) Quina és la probabilitat que una tortuga marina superi els 80 anys de vida? **(3 pt)**
- c) Quina és la probabilitat que una tortuga marina superi els 80 anys de vida, però no els 100 anys de vida? **(3 pt)**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0, 1)$.